PELABELAN CORDIAL DAN E-CORDIAL PADA GRAF KOMPLIT, GRAF SIKEL, GRAF BINTANG, DAN GRAF RODA

Titik Widyawati
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : tietiegwidya@gmail.com

Budi Rahadjeng, M.Si.
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : rahajeng13@yahoo.com

Abstrak

Pelabelangraf merupakan pemberian label pada elemen-elemen graf seperti titik, sisi, titik dan sisi. Sebuah pelabelan disebut pelabelan cordial jika ada pemetaan biner $f: V \rightarrow \{0,1\}$ yang menginduksi pelabelan pada sisi $e = uv$ yang dinyatakan dengan $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ dandidefinisikan dengan $f^*(e = uv = fu - fv$,sehingga memenuhi $|vf0 - vf1| \leq 1$ dan $|ef0 - ef1| \leq 1$. Suatu graf disebut graf cordial jika memenuhi pelabelan cordial. Suatu pelabelan disebut pelabelan e-cordial jika ada pemetaan biner $f: E \rightarrow \{0,1\}$ yang menginduksi pelabelan titik yang didefinisikan dengan $f(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)(mod 2)$, sehingga memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$. Syarat cukup sebuah graf untuk memenuhi sebuah pelabelan e-cordial adalah $n \not\equiv 2(mod 4)$. Sebuah graf disebut graf e-cordial jika memenuhi pelabelan e-cordial. Pada skripsi ini dibahas pelabelan cordial dan e-cordial pada beberapa jenis graf sederhana, yaitu graf komplit, graf sikel, graf bintang, dan graf roda.

Kata kunci : pelabelan pada graf, pelabelan cordial, graf cordial, pelabelan e-cordial, graf e-cordial, graf komplit, graf sikel, graf bintang, graf roda.

Abstract

Graph labelling is give a label to elements of graph that like vertex, edge, both are vertex and edge. A labelling is called cordial labelling if there exist a binary mapping $f: V \rightarrow \{0,1\}$, for an edge e=uv, the induced edge labelling $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ is given by $f^*(e = uv) = |f(u) - f(v)|$, such that following $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ and $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$. The graph is called cordial if it admits a cordial labelling. A labeling is called e-cordial labelling if there exist binary mapping $f: E \rightarrow \{0,1\}$ and induced vertex labeling is given as $f(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)(mod 2)$, such that following $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$ and $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$. Necessary condition for a graph to admit an e-cordial labeling is that $n \not\equiv 2(mod 4)$. The graph is called e-cordial if it admits an e-cordial labelling. The graph which will discussed are complete graph, cycle graph, star graph, and wheels graph.

Keyword :graph labelling, cordial labelling, cordial graph, e-cordial labelling, e-cordial graph, complete graph, cycle graph, star graph, wheel graph.

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia dalam sekali waktu.Pembuktian Euler tersebut ditulis dalam karya tulisnya yang berjudul *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinensi*. Masalah jembatan Konigsberg tersebut dapat dinyatakan dalam istilah graf dengan menentukan keempat daerah itu sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai. Pada awalnya teori graf hanya digunakan untuk memecahkan teka-teki (puzzle), namun akhirnya mengalami perkembangan yang sangat pesat. Misalnya digunakan dalam pencarian lintasan terpendek, permasalahan tukang pos, transportasi, jaringan komunikasi, jaringan radio dan sebagainya.

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan. Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat) yang disebut label.

Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), Stewart (1966), kemudian Kotzig dan Rosa (1970).Ada banyak pelabelan yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan cordial dan e-cordial.Pelabelan cordial adalah pelabelan titik, sedangkan pelabelan e-cordial adalah pelabelan sisi. Pada tahun 1987, I. Cahit menulis jurnal yang berjudul "Cordial Graphs: A weaker version of graceful and harmonious graphs". Jurnal tersebut menjelaskan tentang pelabelan cordial pada beberapa jenis kelas graf, misalnya graf komplit dan graf sikel.Pada tahun 1997, I. Cahit dan R. Yilman mengembangkan pelabelan cordial menjadi pelabelan e-cordial. Mereka menulis jurnal yang berjudul "E-Cordial Graphs".Graf yang dibahas dalam jurnal ini adalah beberapa jenis graf sederhana.

Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis akan mengkaji lebih lanjut tentang sifat-sifat pelabelan cordial dan e-cordial pada beberapa jenis graf sederhana, yakni graf komplit, graf sikel, graf bintang, dan graf roda berdasarkan teorema-teorema yang ada.

METODE PENULISAN

Metode yang digunakan dalam menyusun makalah ini adalah metode kajian pustaka dengan cara memahami, mendalami dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (referensi, jurnal, atau hasil penelitian lain untuk menunjang penelitian). Adapun jurnal utama yang digunakan adalah *Cordial Graphs: A weaker version of graceful and harmonious graphs(I. Cahit, 1987)* dan *E-Cordial Graphs (I. Cahit dan R. Yilman, 1997).*

KAJIAN PUSTAKA

Definisi 1

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut dua himpunan, yaitu himpunan hingga tak kosong V(G) yang elemen-elemennya disebut *titik* dan himpunan berhingga (mungkin kosong) E(G) yang elemen-elemennya disebut *sisi*sedemikian hingga setiap sisi elemen e dalam E(G) merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. V(G) disebut *himpunan titik* dari graf G dan E(G) disebut *himpunan sisi* dari graf G. Jika G tidak memiliki sisi, maka G disebut *graf kosong*.

Definisi 2

Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis a ≡ b (mod m)) bila m membagi (a – b).Jika m tidak membagi (a-b) maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis a≢b (mod m)).

Sifat kekongruenan :

(1) Jika $a \equiv b (\text{mod m})$ maka $a + c \equiv b + c (\text{mod m})$ untuk setiap bilangan bulat c

(2) Jika $a \equiv b (\text{mod m})$ maka $ac \equiv bc (\text{mod m})$ untuk setiap bilangan bulat c

PEMBAHASAN

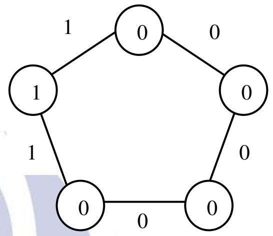
Definisi 3

Pelabelan pada suatu graf adalah fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (vertex labeling).Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (edge labeling) dan jika domain dari fungsi adalah himpunan titik dan sisi maka pelabelan disebut pelabelan total (total labeling).

Definisi4

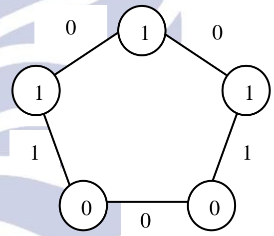
Sebuah pemetaan $f: V(G) \to \{0,1\}$ dari graf G disebut pemetaan titik biner dari G. Fungsi pemetaan tersebut menginduksi pelabelan pada sisi $e = uv$ yang dinyatakan dengan $f^*: E(G) \to \{0,1\}$ dan memenuhi rumus pelabelan sisi $f^*(e = uv) = |f(u) - f(v)|$.

Banyaknya titik pada G yang berlabel 0 dan 1 dinotasikan berturut-turut dengan $v_f(0)$ dan $v_f(1)$. Banyaknya sisi pada G yang berlabel 0 dan 1 dinotasikan berturut-turut dengan $e_f(0)$dan $e_f(1)$.



Definisi 5

Pelabelan titik biner pada graf G disebut pelabelan *cordial* jika memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$. Graf G disebut graf cordial jika memenuhi pelabelan cordial.



Teorema 1

Jika G adalah graf euler dengan e sisi, dimana $e \equiv 2(\text{mod}4)$ maka G tidak mempunyai pelabelan cordial.

Bukti :

Andaikan graf G mempunyai pelabelan cordial.Diketahui bahwa $e \equiv 2(\text{mod}4)$. Berdasarkan teorema 2.3.4, maka$\frac{e}{2} \equiv 1(\text{mod}2)$.

Karena memenuhi $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$dan banyak sisinya adalah $e \equiv 2(\text{mod}4)$, maka banyak sisi yang berlabel 1 harus$\frac{e}{2} \equiv 1(\text{mod}2)$atau ganjil.

Perhatikan untuk jejak tertutup euler yang dimulai dari titik berlabel 0, maka harus berakhir di titik yang sama yakni berlabel 0.Akan tetapi, karena banyak sisi yang dilabel 1 harus ganjil, maka titik terakhir jejak tersebut harus berlabel 1.Hal ini kontradiksi dengan sifat jejak tertutup euler.Maka pengandaian salah.

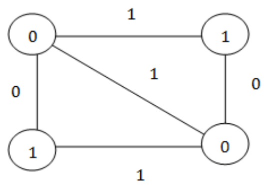
Jadi, terbukti graf euler dengan $e \equiv 2(\text{mod}4)$ adalah tidak cordial.

Definisi 6

Misal diberikan graf G dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G) dengan fungsi $f: E(G) \to \{0,1\}$ dan $f(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv)(mod 2)$.
Fungsi f disebut pelabelan E-Cordial dari G jika memenuhi kondisi sebagai berikut :

1. $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$
2. $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$

Dimana $e_f(0), e_f(1)$ berturut-turut menyatakan banyaknya sisi yang berlabel 0 dan 1, $v_f(0), v_f(1)$ berturut-turut menyatakan banyaknya titik yang berlabeldengan 0 dan 1. Suatu graf disebut graf E-Cordial jika memenuhi pelabelan E-Cordial.



Lemma 1

Jika dalam sebuah pelabelan f dari beberapa graf memenuhi $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, maka $v_f(1) \equiv 0(mod 2)$

Bukti :

Diberikan sebuah pelabelan f pada suatu graf G. Misal $v_i$dan v_j adalah titik-titik pada graf G. Jika sisi dari graf G diberikan label 1, maka label sisi tersebut akan menginduksi titik v_i, v_j tersebut. Karena pelabelan f memenuhi $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, mengakibatkan titik yang dilabel 1 akan selalu berjumlah genap, tanpa memperhatikan banyak titik yang dilabel 0. Sehingga banyak titik yang dilabel 1 adalah $v_f(1) \equiv 0(mod 2)$.

Teorema 2

Syarat cukup dari pelabelan E-Cordial dengan n titik adalah jika Graf G memenuhi pelabelan E-Cordial, maka $n \not\equiv 2\ (mod\ 4)$.

Bukti :

Diberikan graf G dengan titik sebanyak $n \equiv 2(mod 4)$. Karena $n \equiv 2(mod 4)$ genap, maka untuk memenuhi pelabelan e-cordial dibutuhkan titik dengan pelabelan yang sama yaitu $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2}$. Didapatkan $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2} = 1(mod\ 2)$. Maka kontradiksi dengan Lemma 1.
Jadi terbukti jika graf G memenuhi pelabelan e-cordial maka $n \not\equiv 2\ (mod\ 4)$.

Akibat 1

Jika G adalah sebuah graf dengan $n \equiv 1(mod 4)$ dan f adalah sebuah pelabelan *E-Cordial* dari G maka $v_f(0) = v_f(1) + 1$.

Bukti :

Diberikan sebuah graf G dengan titik sebanyak $n \equiv 1(mod 4)$ dan f adalah pelabelan e-cordial pada graf G. Untuk memenuhi pelabelan e-cordial, maka $v_f(0)$ dan $v_f(1)$ harus memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$. Agar memenuhi syarat tersebut, dimisalkan titik $n = a + b$, dimana $a = v_f(1)$ dan $b = v_f(0)$. Berdasarkan lemma 1, karena banyak titik yang berlabel 1 adalah $v_f(1) \equiv 0(mod 2)$, maka $a = \frac{n-1}{2} \equiv 0(mod 2)$ dan $b = n - a = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Didapatkan nilai $b = \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} + 1 = a + 1$
Jadi terbukti $v_f(0) = v_f(1) + 1$, dengan $v_f(1) = a$ dan $v_f(0) = b$.

Akibat 2

Jika G adalah sebuah graf dengan titik sebanyak $n \equiv 3(mod 4)$, dan f adalah sebuah pelabelan *E-Cordial* dari G maka $v_f(1) = v_f(0) + 1$.

Bukti :

Diberikan sebuah graf G dengan titik sebanyak $n \equiv 3(mod 4)$ dan f adalah pelabelan e-cordial pada graf G. Untuk memenuhi pelabelan e-cordial, maka $v_f(0)$ dan $v_f(1)$ harus memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$. Agar memenuhi syarat tersebut, dimisalkan titik $n = a + b$, dimana $a = v_f(1)$ dan $b = v_f(0)$. Berdasarkan lemma 3.2.4, karena banyak titik yang berlabel 1 adalah $v_f(1) \equiv 0(mod 2)$, maka $a = \frac{n+1}{2} \equiv 0(mod 2)$ dan $b = n - a = n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2}$. Didapatkan nilai $b = \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} - 1 = a - 1$

Jadi terbukti $v_f(0) = v_f(1) - 1$ atau $v_f(1) = v_f(0) - 1$ dengan $v_f(1) = a$dan $v_f(0) = b$.

Berikutakan dibahas sifat-sifat pelabelan cordial dan e-cordial pada graf komplit, graf sikel, graf bintang, dan graf roda.

Teorema 3

Graf Komplit K_n adalah cordial jika dan hanya jika $n \leq 3$.

Bukti :

($\rightarrow$)Diberikan graf komplit K_n dengan f adalah pelabelan cordial pada K_n.Banyaknya titik pada graf komplit adalah n, maka akan dibagi menjadi 2 kasus:

<u>Kasus 1 (n genap)</u>

Banyaknya sisi pada graf komplit adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Tanpa mengurangi keumuman, ditetapkan $e_f(1) = \frac{n^2}{4}$ dan $e_f(0) = \frac{n^2-2n}{4}$ .Karena memenuhi pelabelan cordial makahanya berlaku untuk K_n dengan n=2.

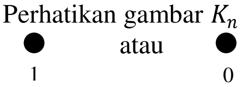
<u>Kasus 2 (n ganjil)</u>

Tanpa mengurangi keumuman, ditetapkan $e_f(1) = \frac{n^2-1}{4}$ dan $e_f(0) = \frac{(n-1)^2}{4}$
Karena memenuhi pelabelan cordial makahanya berlaku untuk K_n dengan $n = 1$ atau 3.

($\leftarrow$) Akan dibuktikan graf komplit K_n dengan $n \leq 3$

<u>Untuk $n = 1$</u>

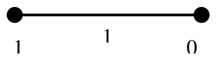
Perhatikan gambar K_n dengan $n = 1$



Karena memenuhi syarat pelabelan cordial maka graf komplit K_n dengan $n = 1$ adalah cordial

<u>Untuk $n = 2$</u>

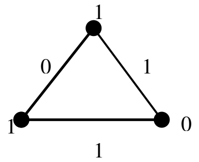
Perhatikan gambar K_n dengan $n = 2$



Karena memenuhi syarat pelabelan cordial maka graf komplit K_n dengan $n = 2$ adalah cordial

Untuk $n = 3$

Perhatikan gambar K_n dengan $n = 3$



Karena memenuhi syarat pelabelan cordial maka graf komplit K_n dengan $n = 3$ adalah cordial

Teorema 4

Graf Sikel C_n dengan n titik adalah cordial jika dan hanya jika $n \not\equiv 2(mod4)$.

Bukti :

($\rightarrow$) Berdasarkan teorema 1 graf sikel C_n adalah cordial untuk $n \not\equiv 2(mod4)$.

($\leftarrow$) Diketahui $n \not\equiv 2\,(mod4)$, berdasarkan sifat kekongruenan maka $n mod\ 4\ \neq 2$

Berasarkan definisi kekongruenan maka $n = 4k + r, r \in \{0,1,3\}$

Karena diketahui $n \not\equiv 2\,(mod4)$, maka akan dibuktikan dengan 3 kasus yakni :

Kasus 1

Jika $r = 0$ dan $n = 4k \equiv 0(mod4)$

Pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0\text{ , jika } i \equiv 1{,}2(mod4) \\ 1\text{ , jika} i \equiv 0{,}3(mod4) \end{cases}$$

Dimana $v_f(0) = 2k = v_f(1)$, mengakibatkan $e_f(0) = 2k = e_f(1)$

Kerena $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$ sehingga memenuhi pelabelan cordial.

Kasus 2

Jika $r = 1$ dan $n = 4k + 1 \equiv 1(mod4)$

Pelabelan titiknya didefinisikan seperti pada kasus 1, sehingga diperoleh :

$$v_f(0) = \frac{n+1}{2} \text{dan} v_f(1) = \frac{n-1}{2}$$

Mengakibatkan $e_f(0) = e_f(1) + 1$

didapatkan $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, sehingga memenuhi pelabelan cordial.

Kasus 3

Jika $r = 3$ dan $n = 4k + 3 \equiv 3(mod4)$

Pelabelan titiknya didefinisikan seperti pada kasus 1, sehingga diperoleh :

$$v_f(0) = \frac{n+1}{2} \text{dan} v_f(1) = \frac{n-1}{2}$$

mengakibatkan$e_f(1) = e_f(0) + 1$

didapatkan $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, sehingga memenuhi pelabelan cordial.

Jadi graf sikel C_n dengan $n \not\equiv 2\,(mod4)$ adalah cordial.

Teorema 5

Graf Bintang $K_{1,n}$ merupakan cordial

Bukti:

Diberikan graf bintang $K_{1,n}$ dengan himpunan titik $V = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan c adalah titik pusat dan himpunan sisi $E = \{v_i c\,; 1 \leq i \leq n\}$.

Untuk pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$f(c) = 0$

$$f(v_i) = \begin{cases} 0\text{, jika} i \equiv 0(mod2) \\ 1\text{, jika} i \equiv 1(mod2 \end{cases}$$

Dari definisi pelabelan titik dan sisi, maka diperoleh 2 kasus :

Kasus 1 (n genap) :

Karena banyak titik pada graf bintang $K_{1,n}$ adalah $n + 1$,diperoleh $v_f(0) = \frac{n}{2} + 1$dan $v_f(1) = \frac{n}{2}$.

Untuk pelabelan sisinya diperoleh $e_f(0) = e_f(1) = \frac{n}{2}$

Maka didapatkan $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, sehingga merupakan graf cordial.

Kasus 2 (n ganjil) :

Karena banyak titik pada graf bintang $K_{1,n}$adalah $n + 1$, diperoleh $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2}$

Untuk pelabelan sisinya diperoleh $e_f(0) = \frac{n-1}{2}$ dan $e_f(1) = \frac{n+1}{2}$

Maka didapatkan $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, sehingga merupakan graf cordial.

Jadi graf bintang $K_{1,n}$merupakan graf cordial.

Teorema 6

Graf Roda W_n adalah cordial jika dan hanya jika $n \not\equiv 3(mod4)$.

Bukti :

($\rightarrow$)Andaikan $n \equiv 3(mod4)$ dengan f adalah pelabelan cordial pada graf roda W_n. Berdasarkan definisi, banyak titik pada graf roda adalah $n + 1$.

Kita asumsikan label titik pusat adalah 0.

Karena memenuhi pelabelan cordial, maka banyaknya titik yang berlabel 0 pada sikel dari graf roda adalah $\frac{n-1}{2}$ dan titik yang berlabel 1 adalah $\frac{n+1}{2}$.

Jika titik yang berlabel 0 diatur secara berurutan, maka akan diperoleh $\frac{n-3}{2}$ sisi yang berlabel 0. Jika titik yang berlabel 1 juga diatur secara berurutan , maka akan diperoleh $\frac{n-1}{2}$ sisi yang berlabel 0. Untuk sisi yang terkait dengan titik pusat, banyaknya sisi yang berlabel 0 adalah $\frac{n-1}{2}$.

Jadi banyak sisi yang berlabel 0 adalah $\frac{n-3}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{3n-5}{2} \equiv\ 0(mod2)$

Banyak sisi pada graf roda adalah $2n$. Jika $n \equiv 3(mod4)$, maka $e_f(0) = e_f(1) = n$, dengan n ganjil.

Karena banyak sisi yang berlabel 0 pada $n \equiv 3(mod4)$ adalah $n \equiv 0(mod2)$ atau genap, maka kontradiksi dengan n haruslah ganjil.

Pengandaian salah.

Jadi, jika graf roda W_n adalah cordial, maka $n \not\equiv 3(mod4)$

($\leftarrow$) Diberikan graf roda W_n dengan himpunan titik $V = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan c sebagai titik pusat
Pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :
$f(c) = 0$
$f(v_i) = \begin{cases} 0, \text{jika} i \equiv 0{,}3(mod4) \\ 1, \text{jika} i \equiv 1{,}2(mod4) \end{cases}$
Karena diketahui $n \not\equiv 3(mod4)$, maka akan dibagi menjadi 3 kasus :
Kasus 1 :
Untuk $n \equiv 1(mod4)$ diperoleh $v_f(0) = v_f(1)$, mengakibatkan $e_f(0) = e_f(1)$
Karena memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$, maka graf roda W_n dengan $n \equiv 1(mod4)$ adalah graf cordial.
Kasus 2 :
Untuk $n \equiv 2(mod4)$ diperoleh $v_f(1) = v_f(0) + 1$, mengakibatkan $e_f(0) = e_f(1)$
Karena memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$, maka graf roda W_n dengan $n \equiv 2(mod4)$ adalah graf cordial.
Kasus 3 :
Untuk $n \equiv 0(mod4)$ diperoleh $v_f(0) = v_f(1) + 1$, mengakibatkan $e_f(0) = e_f(1)$
Karena memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$, maka graf roda W_n dengan $n \equiv 0(mod4)$ adalah graf cordial.
Jadi, graf roda W_n dengan $n \not\equiv 3(mod4)$ adalah graf cordial.

Teorema 7
Graf komplit K_n merupakan graf *E-Cordial*jika dan hanya jika$n \not\equiv 2(mod4)$
Bukti :

($\rightarrow$) Berdasarkan teorema 2 terbukti bahwa untuk memenuhi pelabelan E-cordial maka $n \not\equiv 2(mod4)$.

($\leftarrow$) Akan dibuktikan dengan menambahkan sebuah titik v_{n+1} yang berhubungan terhadap semua titik pada graf K_n yang menghasilkan sebuah graf komplit K_{n+1}, bahwa ketika sebuah graf komplit K_{n+1} mempunyai titik $n + 1 \equiv 2(mod\ 4)$, tidak memenuhi pelabelan E-cordial.
Untuk kasus $n \equiv 3(mod4)$
Untuk K_n diperoleh $v_f(1) = v_f(0) + 1$ dan $e_f(0) = e_f(1) + 1$
Untuk K_{n+1} diperoleh $v_{f'}(1) = v_{f'}(0)$, $e_{f'}(0) = e_{f'}(1)$.
Untuk kasus $n \equiv 0(mod4)$
Untuk K_n diperoleh $v_f(1) = v_f(0)$ dan $e_f(0) = e_f(1)$.
Untuk K_{n+1} diperoleh $v_{f'}(0) = v_{f'}(1) + 1$, $e_{f'}(0) = e_{f'}(1)$.
Untuk kasus $n \equiv 1(mod4)$
Untuk K_n diperoleh $v_f(0) = v_f(1) + 1$ dan $e_f(0) = e_f(1)$.
Untuk K_{n+1} diperoleh $v_{f'}(1) = v_{f'}(0) + 2$, $e_{f'}(1) = e_{f'}(0) + 1$.
Karena $n + 1 \equiv 2(mod4)$
Untuk kasus $n \equiv 2(mod4)$
Untuk K_n diperoleh $v_f(1) = v_f(0) + 2$ dan $e_f(1) = e_f(0) + 1$.
Untuk K_{n+1} diperoleh $v_{f'}(1) = v_{f'}(0) + 1$, $e_{f'}(1) = e_{f'}(0) + 1$.
Jadi terbukti K_n dengan $n \not\equiv 2(mod4)$ adalah graf e-cordial

Teorema8
Graf sikel $C_n$adalah graf *E-Cordial*jika dan hanya jika$n \not\equiv 2(mod4)$
Bukti :

($\rightarrow$) Berdasarkan teorema 2 terbukti bahwa untuk memenuhi pelabelan E-cordial maka $n \not\equiv 2(mod4)$.

($\leftarrow$) Misalkan diberikan graf sikel C_n dengan banyaknya titik adalah n dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
Untuk pelabelan sisinya didefinisikan sebagai berikut :
$f(e_i) = \begin{cases} 0, \text{jika} i \equiv 1{,}2(mod4) \\ 1, \text{jika} i \equiv 0{,}3(mod4) \end{cases}$
Dari definisi tersebut akan dibuktikan graf roda C_n dengan $n \not\equiv 2(mod4)$ adalah e-cordial pada 3 kasus, yakni :
Kasus 1
Jika $n \equiv 0(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi, maka didapatkan $e_f(0) = e_f(1) = \frac{n}{2}$, mengakibatkan $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2}$. Sehingga memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$.
Oleh karena itu, graf sikel C_n dengan $n \equiv 0(mod4)$ merupakan graf e-cordial.
Kasus 2
Jika $n \equiv 1(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi, maka didapatkan $e_f(0) = e_f(1) + 1$ yang mengakibatkan $v_f(0) = v_f(1) + 1$. Sehingga memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$.
Oleh karena itu, graf sikel C_n dengan $n \equiv 1(mod4)$ merupakan graf e-cordial.
Kasus 3
Jika $n \equiv 3(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi, maka didapatkan $e_f(0) = e_f(1) + 1$ yang mengakibatkan $v_f(1) = v_f(0) + 1$. Sehingga memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$.
Oleh karena itu, graf sikel C_n dengan $n \equiv 3(mod4)$ merupakan graf e-cordial.

Jadi, graf sikel C_n dengan $\not\equiv 2(mod4)$ adalah graf cordial

Teorema 9
Graf Bintang $K_{1,n}$ merupakan graf E-Cordial jika dan hanya jika $n \not\equiv 1(mod4)$
Bukti :
(→) Diberikan graf bintang $K_{1,n}$ dengan $n \equiv 1(mod4)$.
Berdasarkan definisi, graf bintang $K_{1,n}$ memiliki titik sebanyak $n+1$, yang berakibat $n+1 \equiv 2(mod4)$.
Oleh karena itu, kontradiksi dengan teorema 2, sehingga graf bintang $K_{1,n}$ e-cordial untuk $n \not\equiv 1(mod4)$

(←) Diberikan graf bintang $K_{1,n}$ dengan himpunan titik $V = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan c adalah titik pusat dan himpunan sisi $E = \{\, v_i c; 1 \le c \le n\}$.
Untuk pelabelan sisinya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i c) = \begin{cases} 0, \text{jika} i \equiv 1{,}3(mod4) \\ 1, \text{jika} i \equiv 0{,}2(mod4) \end{cases}$$

Sebagai akibat dari pelabelan sisi, maka pelabelan titiknya didefinisikan $f(v) = \sum_{uv\in E(G)} f(uv)(mod2)$. Karena $n \not\equiv 1(mod4)$, maka akan dibuktikan dengan 3 kasus, yakni :

Kasus 1:
Untuk $n \equiv 0(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi diperoleh $e_f(0) = e_f(1) = \frac{n}{2}$, dan sebagai akibat dari pelabelan sisi maka pada label titik diperoleh $v_f(1) = \frac{n}{2}$ dan $v_f(0) = \frac{n}{2} + 1$

Kasus 2:
Untuk $n \equiv 2(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi diperoleh $e_f(0) = e_f(1) = \frac{n}{2}$, dan sebagai akibat dari pelabelan sisi maka pada label titik diperoleh $v_f(1) = \frac{n}{2}$ dan $v_f(1) = \frac{n}{2} + 1$

Kasus 3:
Untuk $n \equiv 3(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi diperoleh $e_f(0) = \frac{n-1}{2}$ dan $e_f(1) = \frac{n+1}{2}$, dan sebagai akibat dari pelabelan sisi maka pada label titik diperoleh $v_f(1) = v_f(0) = \frac{n}{2}$.
Dari ketiga kasus tersebut terbukti bahwa graf bintang $K_{1,n}$ dengan $n \not\equiv 1(mod4)$ adalah graf e-cordial.

Teorema 10
Graf Roda W_n, $n \ge 3$ adalah E-Cordial jika dan hanya jika $n \not\equiv 1(mod4)$
Bukti :
(→) Diberikan graf roda W_n dengan $n \equiv 1(mod4)$. Berdasarkan definisi, banyaknya titik pada graf roda adalah $n+1$, yang berakibat ketika $n \equiv 1(mod4)$ maka $n+1 \equiv 2(mod4)$. oleh karena itu, kontradiksi dengan teorema 2.
Jadi, jika graf roda W_n adalah e-cordial maka $n \not\equiv 1(mod4)$

(←) Diberikan graf roda W_n dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$, himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sebagai sisi yang terkait dengan titik pada sikel dan titik pusat dan himpunan sisi $E = \{e_{1,2}, e_{2,3}, \dots, e_{n,1}\}$ sebagai sisi pada sikel dari graf C_n, dimana $C_n \subset W_n$.
Didefinisikan pemetaan dari sisi yang terkait dengan titik pada sikel dan titik pusat dari graf roda W_n adalah sebagai berikut :

$$f(e_i) = \begin{cases} 1, \text{jika } 1 \le i \le \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \\ 0, \text{ untuk i lainnya} \end{cases}$$

Dan didefinisikan pemetaan sisi pada sikel dari graf roda W_n sebagai berikut :

$$f(e_{i,i+1}) = \begin{cases} 0, \text{jika } i \equiv 1(mod2) \\ 1, \text{jika } i \equiv 0(mod2) \end{cases}$$

Untuk pelabelan titiknya didefinisikan $f(v) = \sum_{uv\in E(G)} f(uv)(mod2)$.
Karena $n \not\equiv 1(mod4)$, maka akan dibagi menjadi 3 kasus :

Kasus 1:
Untuk $n \equiv 0(mod4)$
Karena banyak sisi pada graf roda adalah $2n$ maka dari definisi pelabelan sisi diperoleh $e_f(0) = e_f(1) = n$, dan sebagai akibat dari pelabelan sisi maka pada label titik diperoleh $v_f(0) = v_f(1) + 1$

Kasus 2:
Untuk $n \equiv 2(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi diperoleh $e_f(0) = e_f(1) = n$, dan sebagai akibat dari pelabelan sisi maka pada label titik diperoleh $v_f(1) = v_f(0) + 1$

Kasus 3:
Untuk $n \equiv 3(mod4)$
Dari definisi pelabelan sisi diperoleh $e_f(0) = e_f(1) = n$, dan sebagai akibat dari pelabelan sisi maka pada label titik diperoleh $v_f(0) = v_f(1)$.
Dari ketiga kasus tersebut, memenuhi pelabelan e-cordial.Jadi, graf roda W_n dengan $n \not\equiv 1(mod4)$ adalah graf e-cordial.

PENUTUP

Simpulan
Dari pembahasan yang telah diuraikan dalam skripsi ini, dapat diambil kesimpulan bahwa :
1. Sebuah graf merupakan graf cordial jika memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$. Pelabelan sisi terinduksi dari pelabelan titiknya. Graf komplit K_n dan graf sikel C_n merupakan graf cordial dengan $n \not\equiv 2(\text{mod}4)$. Graf bintang $K_{1,n}$ dan graf

roda W_n merupakan graf cordial dengan $n \not\equiv 3(\text{mod}4)$.

2. Sebuah graf merupakan graf e-cordial jika memenuhi syarat $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$ dan $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$. Pelabelan titiknya terinduksi dari pelabelan sisinya yakni $f(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv)(mod2)$. Graf komplit K_n dan graf sikel C_n merupakan graf e-cordial dengan $n \not\equiv 2(\text{mod}4)$. Graf bintang $K_{1,n}$ dan graf roda W_n merupakan graf e-cordial dengan $n \not\equiv 1(\text{mod}4)$.

Saran

Dalam skripsi inihanya dibahas tentang pelabelan cordial dan e-cordial pada beberapa jenis graf sederhana.Bagi para pembaca yang tertarik mengembangkan tulisan ini dapat membahas pelabelan cordial dan e-cordial pada jenis-jenis graf yang lain.

1. DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I Ketut.2007.*Teori Graph dan Aplikasinya.Surabaya* : Unesa University Press.

I.Cahit.*Cordial Graphs: A Weaker Version of Graceful and Harmonious Graphs.*Ars Combinatoria, 23, 1987, pp.201-208.

Irawati, Dina. *Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Bintang*. Vol 2, No 1, 85-89. Padang : Universitas Andalas.

Sari, Dian Noer. 2013. *Pelabelan Graceful Sisi pada Graf Komplit, Graf Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, dan Graf Trisikel.* Skripsi tidak diterbitkan.Surabaya : FMIPA UNESA.

Sukirman. 2005. *Pengantar Teori Bilangan.* Yogyakarta: Hanggar Kreator.

Vaidya S. K and Lekha Bijukumar, 2011.*Some NewFamilies of E-cordial Graphs.* Journal of Mathematics Research, 3 : 105-111. Doi : 10.5539/jmr.v3n4p105

Yilmaz, R. And Cahit, I. (1997).*E-Cordial Graphs*, Ars.Combinatoria, No. 46 , 251-266.